Estudos e pesquisas científicas

V[1]

(*Contribuições brasileiras à Matemática*)

VIEIRA PINTO

Professor na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil. Ex-Professor de Filosofia das Ciencias na Universidade do Distrito Federal

TIVEMOS ocasião, em nossa última crônica, de nos referirmos aos trabalhos do Prof. Lelio Gama, e procurámos dizer em poucas linhas o que significa para a nossa cultura a contribuição desse grande homem de ciencia. Limitámo-nos, porém, a apresentar apenas os trabalhos que se relacionam com suas pesquisas no terreno da astronomia e da mecânica celeste. Aí já por essas realizações se evidencia o prof. Lelio Gama como um dos nossos mais originais creadores; cremos que só o conhecimento completo de sua vasta obra matemática poderá dar a verdadeira impressão dessa singular personalidade de nossa inteligencia.

Desejamos, neste número, apresentar as contribuições de ordem propriamente matemática, que, pela sua importancia, merecem ser divulgadas, pois representam, antes de tudo, uma síntese de varios dominios matemáticos.

Constitue, sem duvida, um dos trabalhos de maior profundeza matemática já publicados no Brasil, a sua "Contribuição à teoria dos limites". Procura o autor estabelecer em sua forma definitiva e absolutamente geral a teoria do limite de uma função, que, nos casos mais simples, é amplamente conhecida. A idéia de conjunto-limite nasceu da nacessidade de definir o que se passa com uma função $f(x)$ num ponto $x=a$ quando essa função não tem limite nesse ponto. Diz-se então que existe no ponto a um *conjunto-limite*, isto é o conjunto dos valores sobre os quais ou em torno dos quais se acumulam as determinações da função quando x tende para a. Assim, si considerarmos uma função $y=f(x)$ da variavel real x, sendo a um ponto proprio de acumulação do campo X da função, designa-se por σ a vizinhança de a. Chamemos $Y(\sigma)$ o conjunto dos valores que a função assume nessa vizinhança. Este conjunto é uma função variavel σ e admite um limite interior *lim*. $Y(\sigma)$. Este limite interior é que se chama *conjunto-limite de* $y = f(x)$ no ponto a, e que se pode representar, por definição:

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{\sigma=0} Y(\sigma)$$

Após a definição, estuda o autor as propriedades fundamentais dos conjuntos-limites, tais como a da aditividade dos conjuntos-limites, o que foi objeto de duas notas publicadas nos "Comptes-Rendus" da Acad. de Sc. de Paris. Estabelece, então, alguns teoremas fundamentais relativos ao conjunto dos limites agregados, mostrando que o mesmo coincide com o conjunto-limite; e nessa demonstração original baseia-se no axioma de Zermelo. Estuda em seguida os conjuntos-limites de uma função de função, onde apresenta um certo número de novos teoremas, e estende-se na parte em que estabelece o cálculo operatorio sobre os conjuntos-limites, cálculo esse que generalisa o clássico cálculo dos limites. A soma, o produto, o quociente ficam definidos, assim, como a equivalencia de duas funções num ponto *a*, pois duas funções são infinitamente equivalentes num ponto, quando teem o mesmo conjunto-limite nesse ponto. A aplicação às funções elementares é feita de maneira completa, sendo definidos os respectivos conjuntos-limites.

Uma importante aplicação das idéias anteriormente estabelecidas é a que se refere à creação do conceito de *conjunto-derivado* de uma função.

Considere-se a função f (x) contínua no ponto *a*. Chama o Prof. Lelio Gama *conjunto-derivado* de f (x) no ponto *a* ao conjunto-limite da relação incremental:

$$\mathrm{Df}(a) = \operatorname*{Lim.}_{x = a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como elementos particulares do conjunto-derivado aparecem os chamados *números derivados*. A idéia do conjunto-derivado permite englobar num só conceito as propriedades das funções que não teem derivado.

Tendo podido estabelecer as regras para o cálculo dos conjuntos-derivados, foi possivel levar à completa generalização as propriedades clássicas das derivadas.

Procurando uma interpretação geométrica para o conjunto-derivado, analoga à que representa para a derivada ordinaria, a tangente à curva figurativa da função, no ponto considerado, chegou o Prof. Lelio Gama à mesma noção, que anteriormente fôra creada por Bouligaud, de *contingente* de uma curva, como generalização da noção de tangente.

Se considerarmos a curva figurativa de uma função sem derivada em um ponto A, S sendo a vizinhança de A, o conjunto das semi-retas que de A projetam os pontos da curva, tem um limite interior, quando S tende para O, e esse limite é, por definição, o *contingente* da curva em A. E', portanto, o feixe das secantes à curva num dado ponto.

Torna-se facil, então, interpretar o conjunto-derivado de f (x) à direita ou à esquerda de *a* como sendo o conjunto dos coeficientes angulares das semi-retas do contingente, à direita ou à esquerda de *a*.

Numerosos teoremas são desenvolvidos no cálculo dos conjuntos-derivados. Representam um traablho da mais vasta e profunda análise, mostrando que o autor levou a seus últimos termos a teoria de que fôra o iniciador. Pode-se dizer que as observações básicas do cálculo dessa nova especie de entidades matemáticas ficaram definitivamente estabelecidas. Como última consequencia, encontra-se a generalização do teorema de l'Hospital, que se aplica ao caso dos conjuntos-derivados como se aplicava às simples derivadas.

Este estudo sobre a teoria dos limites é uma obra admiravel de intuição matemática, porque transporta o cálculo das operações sobre limites do caso restrito das variações particulares para o plano geral em que se trata de conjunto de valores.

Em outro trabalho apresentado à Academia de Ciencias de Paris, estuda o autor a noção de conjunto-limite ao caso de uma função multiforme, definida num espaço do tipo métrico. Os conjuntos-limites estabelecidos no espaço métrico, coincidem com a noção de *acumulativo* de uma função multiforme.

Ainda nessa nota resolve o Prof. Lelio Gama o problema da aditividade do acumulativo. Estes estudos foram retornados e desenvolvidos em outra comunicação à Academia Brasileira de Ciencia, em que investiga algumas questões relativas à teoria dos espaços abstratos e a noção do acumulativo.

Fixando, de inicio, alguns teoremas de estrema generalidade sobre os espaços métricos, cuja demonstração é de sua autoria, pôde depois estender a noção de conjunto-limite às funções definidas no campo métrico. Encontram-se assim ligados os resultados deste trabalho ao do citado anteriormente.

Em uma outra comunicação à Academia de Ciencias ocupa-se o Prof. Lelio Gama de um interessante aspecto da teoria das funções: o que se refere às funçõs de intervalo. Neste artigo estuda os problemas relativos à continuidade e ao limite de uma função real, cuja variavel livre é um intervalo de números reais. E' este um terreno que tem sido até hoje pouco tratado, mas sua importancia verifica-se ser grande, depois que, pelas aquisições do autor, se tornou possivel unificar as demonstrações de certos teoremas de Análise pertencentes a assuntos entre si diferentes, como, por exemplo, os criterios de integrabilidade riemanniana e certas propriedades das funções de variação limitada.

Recentemente, publicou o autor na "Revista Brasileira de Estatística" um trabalho da mais alta significação, que denominou "Introdução à teoria dos conjuntos".

Nada existia até então entre nós sobre tal assunto, nem mesmo uma exposição elementar dessa importantíssima questão. Quis o Prof. Lelio Gama dar aos nossos estudantes de matemáticas superiores um resumo metódico dos fundamentos da teoria dos conjuntos, com que pudessem suprir a falta de uma dissertação facil, o que mesmo nos livros estrangeiros se encontra raramente.

Neste trabalho são os conjuntos supostos definidos em um espaço métrico qualquer, e suas propriedades básicas definidas sob forma a mais generalizada. Após apresentar os conhecimentos clássicos sobre o assunto, mostrando a significação que tem para a elucidação das noções fundamentais de matemática, passa a expor as extensões que a teoria permite dar a certas noções como a de número, introduzindo, então, de forma elementar e particularmente clara, os conceitos de números. transfinitos, ordinais e cardinais. Visa, entretanto, o trabalho estudar os principios em que se baseiam certos desenvolvimentos e generalizações recentes da análise, especialmente aqueles que podem servir ao Cálculo das Probabilidades e à Estatística.

Consideramos precioso, entre todos, este artigo, pois muitas vezes temos visto as dificuldades com que se defrontam os que desejam estudar essa teoria de tão alta significação filosófica, e a impossibilidade em que se encontravam de obter as fontes necessarias.

Temos, nesta rápida resenha, visto alguma coisa da grande obra de creação matemática do Prof. Lelio Gama. Precisariamos ainda de outro artigo, se quiséssemos, mesmo apenas superficialmente, indicar o que são os seus trabalhos ora em andamento. Aplicando-se especialmente ao estudo dos fundamentos da geometria, elabora o autor neste momento um notavel ensaio, em que estabelece as propriedades gerais dos espaços abstratos, levado assim a realizar uma forma de *Análise Geral*, como a tinha visto Fréchet, suprema generalização da Análise clássica.

Em artigo ulterior, procuraremos fixar alguns aspectos dessa produção. Cremos, entretanto, que, com o simples resumo das comunicações aquí comentadas, fica bem claro o papel de primeira ordem representado na nossa vida científica pelo Prof. Lelio Gama. Quiséramos que sua personalidade se fizesse conhecida de todos os meios intelectuais do Brasil, porque, se a natureza especial de sua obra só permite a um pequeno grupo de estudiosos da matemática a compreensão de seu imenso valor, em compensação, a admiração pela sua singular figura de pensador e pelo seu genio criador é coisa que todos lhe podemos tributar.